2nd Exam Calculus of Variations & Optimal Control 2014-15

Datum	:	26-02-2015
Plaats	:	Aletta Jacobs Hall 2
Tijd	:	18.30-21.30

U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u gebruikt.

Het tentamen is OPEN BOEK.

1. In the (t, y) plane one wants to connect the points $(t, y) = (0, 0)$ and $(t, y) = (1, 1)$ via a curve $y(\cdot)$ in such a way that the following criterion is minimized

$$\int_0^1 (y^2(t) + \dot{y}^2(t))dt \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

   (a) Determine by variational calculus the necessary conditions on the function $y(\cdot)$ for minimizing this criterion.

   (b) Rewrite the problem as an optimal control problem by introducing the scalar system

   $$\dot{y} = u,$$

   but modify the problem by *not* imposing the end condition $y(1) = 1$. Solve this optimal control problem by the Minimum principle.

   (c) Solve the problem of the previous part by dynamic programming. Determine the value function $V(y)$, and show that the derivative $\frac{dV}{dy}(y)$ along the optimal trajectory is equal to the co-state variable of the Minimum principle along the optimal trajectory.

2. We willen een karretje dat over een rechte rail kan bewegen vanuit de oorsprong (een gemarkeerd punt op de rail) in *minimale tijd* naar een ander punt op de rail sturen. De stuurvariable is de versnelling die we binnen gegeven grenzen kunnen variëren. Een sterk vereenvoudigd dynamisch model voor het karretje wordt gegeven door

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u \qquad |u(t)| \leq 1 \tag{1}$$

   Om het tijdsoptimale besturingsprobleem op te lossen herschrijven we eerst (1) in toestandsvorm als

$$\frac{d}{dt}x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{2}$$

   met toestand $x = (y, \frac{d}{dt}y)^T$.

   Op het tijdstip $t = 0$ staat het karretje stil op het gemarkeerde punt van de rail. Dit komt overeen met $x(0) = (0, 0)$. Het doel is om het karretje in zo kort mogelijke tijd tot stilstand te laten komen op gegeven afstand $a > 0$ van het markeringspunt. Dit komt overeen met eindtoestand $(a, 0)$ voor het toestandsmodel.

(a) Stel de Hamiltoniaan op, en geef de differentiaalvergelijking voor de co-toestand p. Bepaal hiervan de algemene oplossing.

(b) Leidt uit de algemene oplossing voor de co-toestand het maximaal aantal tekenwisselingen in de optimale besturing u af.

(c) Bepaal op fysische gronden de volgorde waarin de tijd-optimale besturing positieve en negatieve waarden aanneemt.

(d) Noem het moment van tekenwisseling t_1 en het optimale eindtijdstip t_e. Schrijf $x(t_e)$ in termen van t_1 en t_e. Hint: De toestandsvergelijkingen zijn zeer eenvoudig op te lossen voor zowel het geval $u = 1$ als $u = -1$. De integratieconstanten kunnen bepaald worden uit $x(0) = (0, 0)$ en het feit dat x continu is in $x(t_1)$.

(e) Laat zien dat $x(t_e) = (a, 0)$ impliceert dat $t_1 = \sqrt{a}$ en $t_e = 2\sqrt{a}$.

(f) Bepaal voor $a = 4$ de optimale besturing en schets het bijbehorende toestandstraject. Geef in deze schets duidelijk het punt aan waar de besturing van teken wisselt.

(g) Neem nu aan dat het karretje tegen een steeds steilere heuvel aanrijdt, en dat de bewegingsvergelijkingen (1) veranderen in

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y + u \qquad |u(t)| \leq 1 \tag{3}$$

Beantwoord de onderdelen (a),(b) en (c) voor dit geval. Voor welke waarden van $a > 0$ heeft het tijd-optimale probleem in dit geval een oplossing ?

3. Consider the system

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)\,[x_1(t) - 1]\,[2x_1(t) - 1] \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t). \end{aligned} \tag{4}$$

(a) Calculate all equilibrium points of the system (4).

(b) Prove that there are two asymptotically stable equilibrium points.

(c) Investigate the stability of the other equilibrium point(s).

Distribution of points: Total 100; Free 10

1. a: 10, b: 10, c: 10.

2. a: 5, b: 5, c: 5, d: 5, e: 5, f: 5, g: 5.

3. a: 10, b: 10, c: 5.